

## Der Weg ist das Ziel

Damit ein Netzwerk effizient arbeiten kann, müssen nicht nur alle Knoten miteinander verbunden sein, auch die Weglänge zwischen den Knoten sollte möglichst gering sein.

+) Im Englischen wird auch der Begriff *coffee percolator* für Kaffeemaschine verwendet.

Täglich kann man den Prozess der Perkolatation beobachten, wenn heißes Wasser durch gemahlene Kaffee *perkoliert*.<sup>+) Der physikalische Prozess der Perkolatation beschreibt im engeren Sinn die Bewegung von Flüssigkeiten durch poröses Material. Der makroskopische Perkolationsprozess setzt ein räumlich zusammenhängendes System mikroskopischer Kanäle voraus, durch das die Flüssigkeit ihren Weg durch das poröse Material finden kann. Jeder, der schon einmal eine Espressomaschine bedient hat, weiß, dass die Flussgeschwindigkeit des Wassers stark von der Feinheit des gemahlene Kaffees abhängt. Ist das Pulver zu fein gemahlen, kann kein Wasser mehr durch das Pulver dringen, da die mikroskopischen Kanäle nicht mehr zusammenhängen. Physikalisch ausgedrückt heißt das: Man befindet sich unterhalb der Perkolationschwelle. Ein anderes wichtiges Beispiel ist die Leitfähigkeit von Mischungen leitfähigen und nichtleitfähigen Materials, z. B. eine Mischung aus Silberkugeln mit Bakelitpulver.</sup>

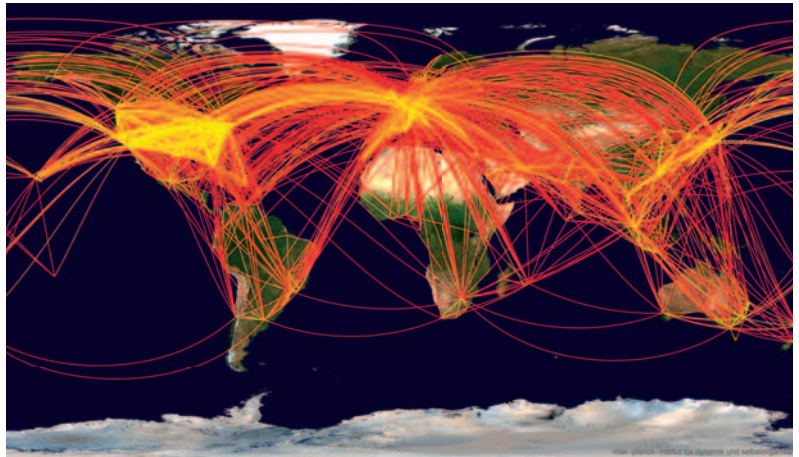


Abb. 1 Der weltweite Flugverkehr zwischen den 500 größten Flughäfen spannt ein komplexes Netzwerk auf. Farbcodiert ist für jede Verbindung die Zahl der Passagiere pro Tag von wenigen (rot) bis zu 20 000 (gelb) angegeben.

Unterhalb einer Metallkonzentration von ca. 30 % leitet die Mischung nicht und zeigt ein Schwellenverhalten in seiner Leitfähigkeit. Perkolatation spielt aber z. B. auch bei Gelationsprozessen eine Rolle [1].

Theoretisches Rückgrat der Perkolatationstheorie sind traditionell reguläre Gitter, deren Knoten mit ihren nächsten Nachbarn über „Links“ verbunden sind. Der wich-

tigste unabhängige Parameter ist die Konzentration  $p$  aktiver Links. Die zentrale Frage ist nun: Bis zu welcher kritischen Konzentration  $0 < p_c < 1$  lassen sich Verbindungen entfernen (Kantenperkolatation) bzw. Knoten entfernen (Knotenperkolatation), sodass immer noch ein makroskopisch verbundenes Netzwerk von Knoten existiert.

Komplexe Netzwerke haben sich in diesen Forschungsbereichen zu einem der erfolgreichsten theoretischen Paradigmen entwickelt [3]. In vielen Systemen repräsentiert ein komplexes Netzwerk aus Knoten und Links das Medium, durch das z. B. Information und Datenpakete fließen (Computernetzwerke), sich Gerüche oder Infektionskrankheiten ausbreiten (soziale Kontaktnetzwerke) und sich Fahrzeuge und Transportmittel bewegen (Verkehrsnetzwerke) [4]. Ansätze aus der Perkolatationstheorie erlauben es direkt, Fragen im Zusammenhang mit dem Ausfall eines Informations- oder Verkehrsnetzwerkes zu behandeln. Am Beispiel des weltweiten Flugverkehrsnetzwerkes ist dies gut zu erläutern (Abb. 1). Jeder Knoten darin ist ein Flughafen, der über Flugverbindungen mit anderen Flughäfen verbunden ist. Das Netzwerk ist so stark verknüpft, dass man von jedem Knoten zu jedem anderen

### KURZGEFASST

#### ■ Einstein doppelt gesehen

Das Hubble-Teleskop hat erstmals einen doppelten Einstein-Ring beobachtet. Ein Einstein-Ring entsteht, wenn das Gravitationsfeld einer massereichen Galaxie im Vordergrund das Licht einer Galaxie im Hintergrund krümmt. Für einen doppelten Einstein-Ring müssen drei Galaxien genau hintereinander liegen. Die Chancen dafür stehen rund 1 : 10 000. Von diesen Beobachtungen erhoffen

Forscher sich u. a. Einsichten in den Ursprung weit entfernter Galaxien. R. Gavazzi et al, arXiv:0801.1555v1, (2008)

#### ■ Bewegung in Graphen

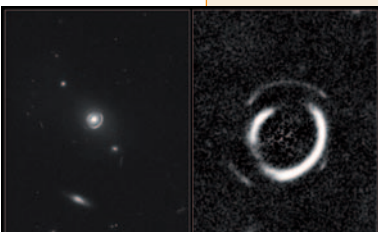
Ein internationales Forscherteam entdeckte jüngst, dass die intrinsische Beweglichkeit einer einatomaren Gra-

phitschicht, sog. Graphen, bei rund 200 000 cm<sup>2</sup>/Vs liegt – also 100-mal höher als in Silizium und 20-mal höher als in GaAs. Graphen ist somit das einzige Material, in dem sich Elektronen bei Raumtemperatur ungestreut über tausende interatomare Distanzen bewegen können. Damit eignet sich Graphen ideal für elektronische Anwendungen. S. V. Morozov et al., Phys. Rev. Lett. **100**, 016602 (2008)

#### ■ Silizium für die Thermoelektrik

Silizium wäre das ideale thermoelektrische Material, stünde ihm nicht seine hohe Wärmeleitfähigkeit im Wege. An Silizium-Nanodrähten fanden nun zwei Gruppen zeitgleich eine Verbesserung der thermoelektrischen Eigenschaften um den Faktor 100. Ein Grund dafür ist die niedrigere Wärmeleitfähigkeit, deren Ursprung allerdings noch nicht vollständig aufgeklärt ist. A. I. Hochbaum et al., Nature **451**, 163 (2007); A. I. Boukai et al., *ibid*, 168 (2007)

NASA, ESA, U California



reisen kann. Eine wichtige Frage der Verkehrstheorie ist: Welchen Anteil der Flugverbindungen kann man entfernen, ohne dass das Netzwerk seine topologische Stabilität verliert und zusammenbricht?

In Studien wurde bislang die Effizienz komplexer Netzwerke immer mit dieser topologischen Stabilität gleichgesetzt, d. h. man hat sich auf die Bestimmung der kritischen Konzentration von Links  $p_c$  beschränkt, unterhalb derer das Netzwerk instabil wird und in viele kleine Teilnetzwerke zerfällt.

**Verbunden aber ineffizient**

In einer kürzlich erschienenen Arbeit haben E. López et al. erkannt, dass die Effizienz eines Netzwerkes nicht zwangsläufig mit dessen topologischer Stabilität zusammenhängt, und einen neuartigen Perkolationsbegriff eingeführt, die *Limited-Path-Percolation* oder kurz *LPP* (Begrenzte-Weg-Perkolation). Zudem haben die Autoren einen bis dahin unbekanntem Phasenübergang in einer Vielzahl anwendungsrelevanter Netzwerke entdeckt und berechnet [5]. Diese Analyse beruht auf der Erkenntnis, dass die Effizienz und Stabilität von Netzwerken mit den Weglängen zwischen einzelnen Knotenpaaren zusammenhängt.

Am Beispiel eines der am meisten untersuchten Netzwerke, dem Erdős-Renyi-Netzwerk (ER-Netzwerk), kann man die Ergebnisse gut erläutern (Abb. 2). Beim ER-Netzwerk werden potenzielle Links zwischen den Knoten unabhängig voneinander zufällig gewählt, sodass im Mittel jeder Knoten mit  $\langle k \rangle$  anderen Knoten verknüpft ist.  $k$  bezeichnet man als Knotengrad. Der mittlere kleinste Abstand  $l$  zwischen zwei Knoten lässt sich berechnen und skaliert logarithmisch mit der Anzahl der Knoten  $N$  und dem mittleren Knotengrad

$$\langle l \rangle = \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}.$$

Für ein ER-Netzwerk kann man zeigen, dass die gewöhnliche Perkolationschwelle bei  $p_c = 1/\langle k \rangle$  liegt. Ist beispielsweise der mittlere Knotengrad 3, so muss die Anzahl der Verbindungen auf ca. 30 %

reduziert werden, damit das Netzwerk in kleine, nicht zusammenhängende Teilnetzwerke zerfällt und seine Stabilität einbüßt.

Lopez et al. haben erkannt, dass bei vielen Anwendungen nicht diese makroskopische Konnektivität des Netzwerkes den Ausschlag gibt, sondern die Eigenschaften der kürzesten Strecken  $L_{ij}$  zwischen Knoten  $i$  und  $j$ , weil diese z. B. mit Transportkosten in Verbindung zu setzen sind. Im Rahmen der LPP werden aus einem gegebenen Netzwerk zufällig Verbindungen bis zu einer bestimmten Konzentration  $p$  entfernt. Allgemein wird sich dadurch die minimale Weglänge zwischen zwei beliebigen Knoten erhöhen. Nun wird angenommen, dass die Verbindung zweier Knoten als *ineffizient* verbucht wird, wenn die neue minimale Pfadlänge  $\tilde{L}_{ij}$  im Verhältnis zur alten  $L_{ij}$  einen Grenzwert  $a > 1$  überschreitet

$$\frac{\tilde{L}_{ij}}{L_{ij}} > a.$$

Ist beispielsweise der Grenzwert  $a = 2$ , darf der neue Weg höchstens doppelt so lang sein. Der Parameter  $a$  ist zunächst ein beliebiger Parameter, der die maximal akzeptable Wegverlängerung quantifiziert. Die Autoren haben gezeigt, dass eine große Anzahl von Netzwerken neben der konventionellen Perkolationschwelle  $p_c$  noch eine zweite LPP-Schwelle  $\tilde{p}_c(a)$  aufweisen, deren Wert typischerweise größer ist:

$$p_c < \tilde{p}_c(a) = 1/\langle k \rangle^{\frac{a-1}{a}}$$

Die LPP-Schwelle kann in vielen Systemen deutlich höher liegen als die konventionelle Perkolationschwelle. Im Beispiel des ER-Netzwerkes mit mittlerem Knotengrad  $\langle k \rangle = 3$  und für einen Grenzwert  $a = 2$  erhält man  $p_c = 33,3\%$  und  $\tilde{p}_c = 57,6\%$ . Das heißt (wenn  $p_c < p < \tilde{p}_c$ ): Netzwerke, die topologisch noch stabil sind (zusammenhängend), können trotzdem schon *ineffizient* bezüglich der typischen Wege sein, weil sich Informationen, Datenpakete (in Computernetzwerken) oder Transportmittel (auf Verkehrsnetzwerken) nicht mehr effizient zwischen den Knoten transportieren lassen. Dieses Resultat ist von besonderem Interesse für die

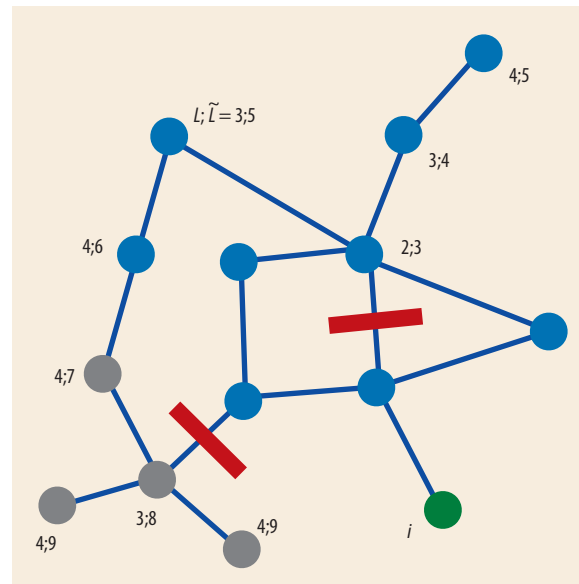


Abb. 2 In diesem Netzwerk sind alle 14 Knoten über Zwischenstationen miteinander verbunden, auch wenn man Links entfernt (rote Balken). Dann beträgt die minimale Weglänge zum Referenzknoten  $i$  (grün) aber nicht mehr  $L$ , sondern  $\tilde{L}$ . Für einen festgelegten Grenzwert  $a = 3/2$  lassen sich die grauen Knoten nicht mehr effizient erreichen. Sie sind somit effektiv vom Referenzknoten entkoppelt.

Analyse und Ausfallkalkulation für Verkehrsnetzwerke. In diesen Netzwerken wachsen die Betriebskosten in etwa proportional zu den Wegen zwischen den Knoten. Dürfen die Mehrkosten durch den Ausfall von Verbindungen einen Faktor  $a$  nicht überschreiten, so dürfen maximal  $q = 1 - \tilde{p}_c$  Links ausfallen, bevor das Netzwerk ausfällt. Und diese Situation kann eintreten, obwohl topologisch noch jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist.

Die Einführung von LPP wird in Zukunft weitere interessante Einblicke in die Netzwerkoptimierung und Ausfallanalyse realer Netzwerke liefern – mit einer Fülle von transdisziplinären Anwendungen z. B. in der Biophysik, Soziologie, Infektionsepidemiologie, Informationstechnologie und natürlich der Verkehrsforschung.

Dirk Brockmann

[1] S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. 45, 574 (1973)  
 [2] H. Kesten, Communications in Mathematical Physics 74, 41 (1980)  
 [3] R. Albert und A. L. Barabasi, Rev. Mod. Phys. 74, 47 (2002)  
 [4] L. Hufnagel, D. Brockmann und T. Geisel, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 101, 15124 (2004)  
 [5] E. Lopez et al., Phys. Rev. Lett. 99, 188701 (2007)

Prof. Dr. Dirk Brockmann, Northwestern University, Evanston, IL, USA und Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Göttingen